Calcul d'une intégrale

L'objectif de ce problème est de calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Dans tout le problème n désigne un entier naturel.

Partie I

On pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'égalité des deux intégrales proposées ci-dessus.
2. Montrer que (J_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs.
3. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)J_{n+1} = (2n+1)J_n$.
4. Exprimer J_n à l'aide de factoriels.

Partie II

On pose $K_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$ et $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1.a Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$K_{n+1} - K_n = \frac{-1}{2n+1} K_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t$$

1.b En déduire :

$$K_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - K_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} J_{n+1}$$

puis :

$$\frac{K_{n+1}}{J_{n+1}} - \frac{K_n}{J_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2} .$$

1.c En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de S_n en fonction de $\frac{K_n}{J_n}$ et de $\frac{K_0}{J_0}$.

2.a Expliquer rapidement pourquoi, pour tout $t \in [0, \pi/2], t \le \frac{\pi}{2}\sin t$.

2.b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \le K_n \le \frac{\pi^2}{4}(J_n - J_{n+1}) = \frac{\pi^2 J_n}{8(n+1)}$

2.c Déterminer $\lim_{n\infty} S_n$.

3. On pose $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$.

3.a Exprimer S'_{2n+1} en fonction de S_n et de S_{2n+1} .

3.b Montrer que $\lim_{n\infty} S'_n = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie III

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall q \in \mathbb{N}^*, \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}\right| \le \frac{x^{q+1}}{q+1}$.

2. Soit $\varphi :]0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

2.a Montrer que φ se prolonge par continuité en sur $[0,1]$ en une fonction qui sera encore notée φ .

2.b En encadrant convenablement φ donner la valeur de $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.